

II 有限要素法

【4】有限要素法の原理

(偏)微分方程式を変分問題に変換してリッツの方法により直接解くことで、未知関数 $y(x), u(x, y)$ を求めることができる。リッツの方法を簡単化、効率化、数値計算向きに汎用化したものが有限要素法である。

リッツの方法で用いる試行関数は領域全体で値を持ち、境界条件を満たす関数が採用されるが、有限要素法では領域を離散化して要素、節点に分割し、節点 i で値1を持ち、他の節点では0であるような区分的試行関数 $\phi_i(x), \phi_i(x, y)$ (いわゆるテント関数) が使われる。

この節では1次元の場合で有限要素法の原理を示す。

(1) 1次元の場合の節点、要素、区分的試行関数

1次元の場合、図1のように1次元領域(直線)を N 個の節点、 $N-1$ 個の要素(1次要素)に分割して未知関数 $y(x)$ を次式のように近似する。

$$y(x) = \sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x) \quad , \quad y_i = y(x_i) \quad (1)$$

但し、1次元領域(直線)を $a \leq x \leq b$ として、その両端点 $x = a, b$ を $x = x_1, x_N$ としている。

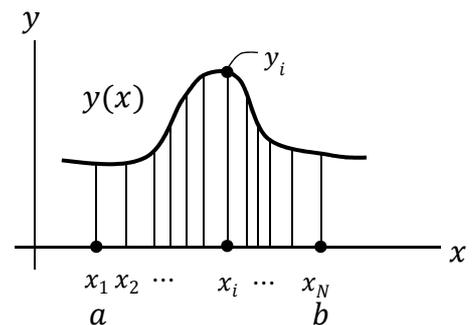


図1 1次元領域の離散化

(A) 節点 i ($i = 1 \dots N$) における x 座標を x_i とする。

(B) 要素とは節点で囲まれた小さな区分された領域で、1次元の場合は両端の節点の間の線分である。

(C) 区分的試行関数 $\phi_i(x)$ とは図2のように、節点 i では $\phi_i(x_i) = 1$ 、他の節点では $\phi_i(x_j) = 0$ ($i \neq j$) となる1次関数とする。

(D) $\phi_i(x)$ は節点 i を含む2つの要素内、つまり、節点 i と節点 $i-1$ の間の領域(要素)と、節点 i と節点 $i+1$ の間の領域(要素)のみで値を持っている。

つまり、区分的試行関数 $\phi_i(x)$ とは節点 i に付随する関数である。

図2のように要素内で $\phi_i(x)$ が1次式で表わされる場合はその要素のことを(1次元)1次要素、2次式で表わされる場合は(1次元)2次要素という。

以下では、1次要素を対象にする。

節点 i に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ は、

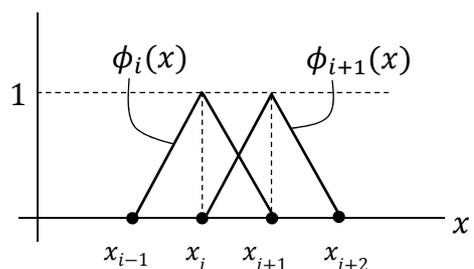


図2 区分的試行関数(1次元)

$$\begin{cases} \phi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (x_{i-1} \leq x \leq x_i) \\ \phi_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \end{cases} \quad (2)$$

節点 $i + 1$ に付随する区分的試行関数 $\phi_{i+1}(x)$ は,

$$\begin{cases} \phi_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \\ \phi_{i+1}(x) = \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} & (x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2}) \end{cases} \quad (3)$$

である。

領域 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ では、つまり節点 i と節点 $i + 1$ の間の要素内では、 $\phi_i(x)$ と $\phi_{i+1}(x)$ 以外の区分的試行関数はゼロであるから、この要素内で $y(x)$ は、

$$y(x) = y_i \phi_i(x) + y_{i+1} \phi_{i+1}(x) = y_i \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (4)$$

と補間される。

上式は点 (x_i, y_i) と (x_{i+1}, y_{i+1}) を結ぶ直線になる。なお、領域の両端点 $x = a, b$ を $x = x_1, x_N$ としているので上式では $1 \leq i \leq N - 1$ である。そこで、

(E) 節点 i での近似関数値を y_i とすると、式(1)の $y(x) = \sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x)$ は点 $(x_i, y_i) (i = 1 \dots N)$ を結んだ折れ線グラフになる。(1次要素の場合)

(2) 1次元の場合の計算例

以上のような性質(A)-(E)を持った区分的試行関数 $\phi_i(x)$ を用いてリッツの方法に基づく有限要素法により前節と同じ変分問題を解く。この変分問題は微分方程式 $y'' = -1$ を書き換えたものである。

(変分問題)

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 - 2y) dx \quad (5)$$

境界条件 : $x = 0, 1$ で $y = 0$

とする。

$$y(x) = \sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x) \quad , \quad y_i = y(x_i) \quad (1)$$

上式で y_i は変分パラメータである。

図1のように領域 $0 \leq x \leq 1$ を N 個の節点、 $N - 1$ 個の要素で分割する。

$$y'^2 - 2y = \sum_{i,j=1}^N y_i y_j \phi_i'(x) \phi_j'(x) - 2 \sum_{i=1}^N y_i \phi_i(x)$$

であるから、停留条件を課すと、

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^N 2y_j \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx - 2 \int_0^1 \phi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1 \dots N) \quad (6)$$

となり、 $\{y_i\}$ を未知数とする $N \times N$ の連立 1 次方程式 $[A]\{y_i\} = \{b_i\}$ が得られる。

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{ij} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx, \quad b_i = \int_0^1 \phi_i(x) dx \quad (8)$$

さらに境界条件として $y_1 = 0, y_N = 0$ を式(7)に代入する。それには

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \quad b_i = 0 \quad (i = 1 \text{ or } N) \quad (9)$$

とする。

ここで、具体的に式(8)を計算してみる。

図3のように領域 $0 \leq x \leq 1$ を5個の節点、4個の要素で等分割して(要素長 $h = 1/4$ になる)、4つの要素内積分を加え合わせることにする。各要素内には2つの区分的試行関数しか存在しないから、

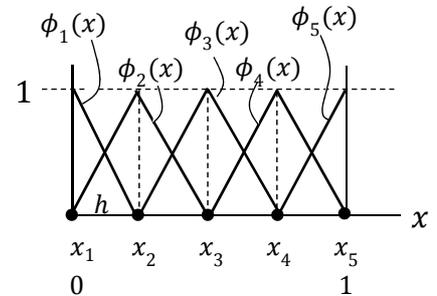


図3 領域分割と区分的試行関数

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x) dx = \int_0^h (A) dx + \int_h^{2h} (B) dx + \int_{2h}^{3h} (C) dx + \int_{3h}^1 (D) dx$$

において、4つの要素内の被積分関数 $(A), (B), (C), (D)$ に含まれる項とその積分値は式(2)を用いて、

$$(A) \Rightarrow \phi_1'(x)\phi_1'(x), \phi_1'(x)\phi_2'(x), \phi_2'(x)\phi_1'(x), \phi_2'(x)\phi_2'(x) \Rightarrow \frac{1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{1}{h^2}$$

$$(B) \Rightarrow \phi_2'(x)\phi_2'(x), \phi_2'(x)\phi_3'(x), \phi_3'(x)\phi_2'(x), \phi_3'(x)\phi_3'(x) \Rightarrow \frac{1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{1}{h^2}$$

$$(C) \Rightarrow \phi_3'(x)\phi_3'(x), \phi_3'(x)\phi_4'(x), \phi_4'(x)\phi_3'(x), \phi_4'(x)\phi_4'(x) \Rightarrow \frac{1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{1}{h^2}$$

$$(D) \Rightarrow \phi_4'(x)\phi_4'(x), \phi_4'(x)\phi_5'(x), \phi_5'(x)\phi_4'(x), \phi_5'(x)\phi_5'(x) \Rightarrow \frac{1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{-1}{h^2}, \frac{1}{h^2}$$

となる。例えば a_{22} は $\int_0^h (A) dx$ と $\int_h^{2h} (B) dx$ からの和になっていて、式(2)より

$$\int_0^h \phi_2'(x)\phi_2'(x) dx = \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx = \frac{1}{h} \quad \text{と} \quad \int_h^{2h} \phi_2'(x)\phi_2'(x) dx = \int_h^{2h} \left(\frac{-1}{h}\right)\left(\frac{-1}{h}\right) dx = \frac{1}{h}$$

であるから、 $a_{22} = 2/h$ となる。すべての行列成分 a_{ij} を求めると、

$$[a_{ij}] = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

一方、 b_i は式(2)より以下となるが、これらの積分は図3を見れば3角形の面積であるから単純に計算できて、

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^h \phi_1(x) dx = \int_0^h \frac{h-x}{h} dx = \frac{1}{2}h \\ b_2 &= \int_0^h \phi_2(x) dx + \int_h^{2h} \phi_2(x) dx = \int_0^h \frac{x}{h} dx + \int_h^{2h} \frac{2h-x}{h} dx = h \\ b_3 &= \int_h^{2h} \phi_3(x) dx + \int_{2h}^{3h} \phi_3(x) dx = \int_h^{2h} \frac{x-h}{h} dx + \int_{2h}^{3h} \frac{3h-x}{h} dx = h \\ b_4 &= \int_{2h}^{3h} \phi_4(x) dx + \int_{3h}^1 \phi_4(x) dx = \int_{2h}^{3h} \frac{x-2h}{h} dx + \int_{3h}^1 \frac{1-x}{h} dx = h \\ b_5 &= \int_{3h}^1 \frac{x-3h}{h} dx = \frac{1}{2}h \end{aligned}$$

となる。

$$\therefore {}^t[b_i] = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5] = h[1/2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1/2]$$

したがって、

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

となるが、この連立1次方程式は解が存在しない。解が存在しないのは、行列の3列目 $=-(1$ 列目 $+2$ 列目 $+4$ 列目 $+5$ 列目)となっていて5つの列ベクトルが線形独立でないことからわかる(行ベクトルでも同じ)。境界条件 $y_1 = 0, y_5 = 0$ を設定することにより正則な行列になる。 $a_{11} = 1, a_{1j} = 0 (j \neq 1), a_{55} = 1, a_{5j} = 0 (j \neq 5), b_1 = 0, b_5 = 0$ であるから結局、 y_2, y_3, y_4 を未知数とする次の連立1次方程式となる。

$$\frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これを解くと、 $h = 1/4$ より、 $y_3 = 2h^2 = 1/8, y_2 = y_4 = 3h^2/2 = 3/32$ となる。

正解は $y(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)$ なので、 $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}, y(\frac{1}{4}) = y(\frac{3}{4}) = \frac{3}{32}$ であり一致している。

実は、領域 $0 \leq x \leq 1$ を2要素3節点で分割した場合でも $y_2 = y(1/2) = 1/8$ となり、厳密解と一致する。このように粗い分割でも厳密解と一致する理由は(補足)を参照。

(補足) 上の例で節点において厳密解と一致する理由

汎関数

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_n} (y'^2 + 2ay) dx$$

(a は定数) に対してオイラー方程式から $y'' = a \rightarrow y = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ が得られて、境界条件より定数 b, c が決まる。これを 1 次要素を用いた有限要素法で解くと、領域を等分割 (分割幅 h) した場合は、両端でディリクレ型境界条件 \bar{y}_1, \bar{y}_n を満たすとして、

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1/h^2 \\ -a \\ -a \\ \vdots \\ -a \\ \bar{y}_n/h^2 \end{bmatrix}$$

となるのは本文で示した通りである。上の連立 1 次方程式の第 i 行は符号を変えて、

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = a \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

となっているが、これは 2 階微分 $y'' = a$ (一定) の差分方程式と同じである。

2 次関数 $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ をテーラー展開すると、

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 = \frac{1}{2}a(x+h)^2 + b(x+h) + c$$

となり、2 次関数ゆえ y''' 以降は 0 で上式は h の大きさに依らず成立する厳密な式である。したがって、

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2$$

辺々加えると $y''(x) = a$ (一定) ゆえ、 $y(x_i) = y_i$ と表記して、

$$y_{i-1} + y_{i+1} = 2y_i + y''(x_i)h^2 \quad \therefore \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = y''(x_i) = a$$

となる。これは厳密な関係式であり、 $i = 2 \dots n-1$ までとって両端のディリクレ型境界条件を加えると、この差分方程式は有限要素法による上の連立 1 次方程式と一致する。つまり 1 次要素を用いた有限要素解 (節点における関数値 y_i) が厳密解と一致する。この理由は、 $y(x)$ が 2 次関数であったからである。

(3) 1次元要素の形状関数

以上の計算では積分を要素ごとに分割して計算したが、式(8)の積分はそのように要素内積分の総和として計算するのが効率的である。

領域 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ の要素では、 $\phi_i(x)$ と $\phi_{i+1}(x)$ の2つ以外の区分的試行関数は存在しないから、要素に付随する区分的試行関数2つを考える。

$$N_{iel,k}(x) \quad (iel = 1 \cdots NE, \quad k = 1, 2) \quad (10)$$

ここで、 iel は要素番号、 NE は総要素数で、上の例の場合 $NE = N - 1$ である。 $k = 1, 2$ は各要素両端の節点を示す番号で、要素内節点番号と言う。

領域 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ の要素番号を $iel = i$ とすれば、

$$\begin{cases} N_{iel,1}(x) = \phi_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \\ N_{iel,2}(x) = \phi_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & (x_i \leq x \leq x_{i+1}) \end{cases} \quad (11)$$

$$(1 \leq iel \leq NE, \quad 1 \leq i \leq N - 1)$$

である (図2参照)。

式(8)の積分を要素内積分 \int_{iel} の和で表わせば、

$$\begin{cases} a_{ij} = \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \Rightarrow \sum_{iel=1}^{NE} \int_{iel} \sum_{k,s=1}^2 N'_{iel,k}(x) N'_{iel,s}(x) dx \\ b_i = \int_0^1 \phi_i(x) dx \Rightarrow \sum_{iel=1}^{NE} \int_{iel} \sum_{k=1}^2 N_{iel,k}(x) dx \end{cases} \quad (12)$$

となる。

ここで、 $\phi_i(x)$ の全体節点番号 $i = 1 \cdots N$ と $N_{iel,k}(x)$ の要素内節点番号 $k = 1, 2$ とは対応が取れているとする。 $i = knc(k, iel)$ という関数を用いる。

式(10)(11)は形状関数と呼ばれ、要素に付随する区分的試行関数と言える。

節点に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ とは次の関係があり、

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(x) = \sum_{iel=1}^{NE} \sum_{k=1}^2 N_{iel,k}(x) \quad (13)$$

領域全体で加えると同じものになるが、節点ごとに $\phi_i(x)$ を求めるよりも要素ごとに

$N_{iel,k}(x)$ を求める方が機械的に行えて (特に2次元の場合)、積分も \int_{iel} の和で行える。有限要素法ではこのような形状関数を使って要素内積分を行う。

形状関数という名前の由来は、 $N_{iel,k}(x)$ が式(11)のように要素を構成する節点により表わさ

れるので、おそらく特に2次元要素（3角形や4角形）の場合に要素形状を反映する関数になるからである。

(F) 形状関数 $N_{iel,k}(x)$ とは要素に付随する関数で、要素内で $y(x)$ を補間する関数である。節点に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ ($i = 1 \dots N$) を要素内に振り分けて要素に付随する関数としたものである。

要素内節点番号を $k, s = 1, 2$ とすると $N_{iel,k}(x_s) = \delta_{ks}$ である。但し、ここで x_s は全体節点番号 $i = knc(s, iel)$ の座標値 x_i を要素内節点番号 s で表記したものである。

(2) の具体的な計算例でも、要素ごとに積分を行っていたのであるが、この形状関数 $N_{iel,k}(x)$ を使って表わすと、式(11)より4つの要素内で、

$$\begin{aligned} iel = 1 \quad (x_1 \leq x \leq x_2), \quad N_{1,1}(x) = \phi_1(x) &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_{1,2}(x) = \phi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ iel = 2 \quad (x_2 \leq x \leq x_3), \quad N_{2,1}(x) = \phi_2(x) &= \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}, \quad N_{2,2}(x) = \phi_3(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \\ iel = 3 \quad (x_3 \leq x \leq x_4), \quad N_{3,1}(x) = \phi_3(x) &= \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3}, \quad N_{3,2}(x) = \phi_4(x) = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \\ iel = 4 \quad (x_4 \leq x \leq x_5), \quad N_{4,1}(x) = \phi_4(x) &= \frac{x_5 - x}{x_5 - x_4}, \quad N_{4,2}(x) = \phi_5(x) = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} \end{aligned}$$

となる。

これらは次のような統一的な表式で書ける。

各要素の左側の全体節点番号を $i_1 = knc(1, iel)$ 、右側を $i_2 = knc(2, iel)$ とすると、

$$N_{iel,1}(x) = \frac{x_{i_2} - x}{x_{i_2} - x_{i_1}}, \quad N_{iel,2}(x) = \frac{x - x_{i_1}}{x_{i_2} - x_{i_1}}$$

となる。

式(12)の積分は要素ごとに $N_{iel,k}(x)$ についての積分（要素内積分）を行って総和をとることで、要素内節点番号 k に関する $N_{iel,k}(x)$ の積分を、 k に対応する全体節点番号 i に付随する $\phi_i(x)$ の積分として全体マトリックスの行列成分 a_{ij} に加えて行く。

関数 $i = knc(k, iel)$ と形状関数を用いることで要素内積分と全体マトリックスの組み立てのプログラムを効率よく作成できる。なお、 $knc(k, iel)$ は $k = 1 \dots 4$ として第7節の2次元問題の場合でも使用する。

以上で示したように、有限要素法による(偏)微分方程式の解法は、変分問題に置き換えて最終的には $\{y_i\}$ を未知数とする連立1次方程式に帰着させる方法であるが、その原理はリッツの方法と同じで、違いは領域全体で値を持つ試行関数の代わりに、節点 i に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ を用いることである。さらに、この $\phi_i(x)$ を要素内に振り分けて要素 iel に付随する区分的試行関数として、形状関数 $N_{iel,k}(x)$ を用いることである。形状関数を用いることで領域全体の積分を要素内積分の和として機械的に計算することができる。

以下、2次元問題の場合（第7節）でさらに具体的に示す。

【5】2次元ラプラス方程式の解法

(1) 2次元の場合の節点, 要素, 区分的試行関数

2次元領域の場合も N 個の節点, NE 個の要素で分割して網目のようなメッシュ分割図ができる。要素は節点に囲まれており節点も要素に囲まれている。以降, 4 節点 4 角形要素について記す。

4 節点 4 角形要素とは図 4 のように 4 角形の 4 頂点を節点とする要素で (1...4 は要素内節点番号で左回りに番号付けする), なお, メッシュ分割では隣接する要素は共通の辺でつながっており, 1 つの要素に含まれる節点の数は 4 個である。

また, 区分的試行関数 $\phi_i(x, y)$ ($i = 1 \dots N$) は要素内を 1 次補間する関数であることが後にわかる。

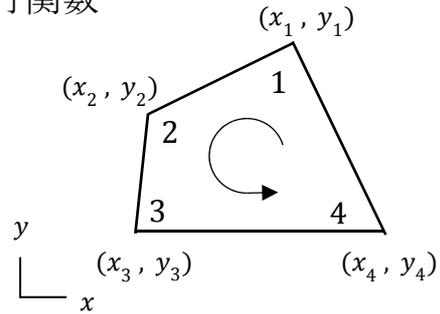


図 4 4 角形 4 節点要素 (1 次要素)

未知関数 $u(x, y)$ は節点 i の座標を (x_i, y_i) として,

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x, y) \quad , \quad u_i = u(x_i, y_i) \quad (14)$$

と表わされる。

区分的試行関数 $\phi_i(x, y)$ ($i = 1 \dots N$) は節点 i では値 1 ($\phi_i(x_i, y_i) = 1$), その他の節点では 0 ($\phi_i(x_j, y_j) = 0, i \neq j$) となる節点 i に付随する関数である。 $\phi_i(x, y)$ は図 5 に示すように節点 i を含む周りの要素内でのみ値を持つ関数となる。テントの形をしているのでテント関数とも呼ばれる。

1 次補間する関数とは要素内で x, y について 1 次式になっている関数である。

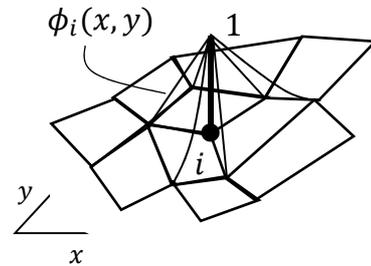


図 5 区分的試行関数 (2次元)

(2) 2次元ラプラス方程式のリッツの方法による有限要素法の定式化

2次元ラプラス方程式

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

を変分問題に書き換えると, 次の汎関数 $I[u]$ が極値をとる問題となる (第 I 章第 2 節)。

$$I[u] = \iint_S \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (16)$$

$$\begin{cases} u = \bar{u}_a & \text{at } \partial S_a \\ u = \bar{u}_b & \text{at } \partial S_b \end{cases} \quad (17)$$

領域 S , 境界 $\partial S = \partial S_a + \partial S_b$ は図6のような場合を考えて, 境界条件はディリクレ型境界条件として, ∂S_a 上で \bar{u}_a , ∂S_b 上で \bar{u}_b とする。

これは, ∂S_a 上に \bar{u}_a [V], ∂S_b 上に \bar{u}_b [V] を与えた静電場の問題や, ∂S_a 上に \bar{u}_a [°C], ∂S_b 上に \bar{u}_b [°C] を与えた温度場の問題などに相当する。なお, 境界は領域を左回りに囲む方向を持っている。

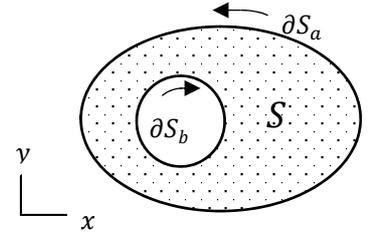


図6 2次元領域と境界

領域 S を N 個の節点, NE 個の要素で分割して, 区分的試行関数により未知関数 $u(x, y)$ を式(14)で表わす。

停留条件は

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \iint_S \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0 \quad (i = 1 \dots N) \quad (18)$$

であり,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &= \left(u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dots + u_N \frac{\partial \phi_N}{\partial x} \right) \left(u_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \dots + u_N \frac{\partial \phi_N}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &= 2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} u_j \end{aligned}$$

となる。 y についても同様で, 結局, 次の $N \times N$ 連立1次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & a_{ij} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = \iint_S \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} dx dy \quad (19)$$

ここで, 上式を $[A]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{b}\}$ と略記すると右辺 $\{\mathbf{b}\}$ はゼロベクトルであるが, 境界条件式(17)を代入すると, 対応する境界上の節点 k (例えば $k \in \partial S_a$ 上とする) について

$$a_{kj} = \delta_{kj} \quad (j = 1 \dots N), \quad b_k = \bar{u}_a \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_a \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

などとなり, 上の $N \times N$ 連立1次方程式は解を持つ。

式(19)の全体マトリックスの行列成分 a_{ij} の計算は領域 S での積分であるが, 1次元の計算例で示したように要素ごとに積分して加え合わせるという方法をとる。その際に要素に付随する区分的試行関数, すなわち形状関数を用いる。