Ⅱ　有限要素法

【４】有限要素法の原理

（偏）微分方程式を変分問題に変換してリッツの方法により直接解くことで，未知関数 $y(x)$, $u(x,y)$ を求めることができる。リッツの方法を簡単化，効率化，数値計算向きに汎用化したものが有限要素法である。

リッツの方法で用いる試行関数は領域全体で値を持ち，境界条件を満たす関数が採用されるが，有限要素法では領域を離散化して要素,節点に分割し，節点 i で値１を持ち，他の節点では０であるような区分的試行関数 $\phi_i(x)$, $\phi_i(x,y)$ （いわゆるテント関数）が使われる。

この節では１次元の場合で有限要素法の原理を示す。

（１）１次元の場合の節点，要素，区分的試行関数

１次元の場合，図１のように１次元領域（直線）を N 個の節点，N-1 個の要素（１次要素）に分割して未知関数 $y(x)$ を次式のように近似する。

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \phi_i(x) \quad , \qquad y_i = y(x_i) \tag{1}$$

但し，１次元領域（直線）を $a \le x \le b$ として，その両端点 $x = a, b$ を $x = x_1, x_N$ としている。

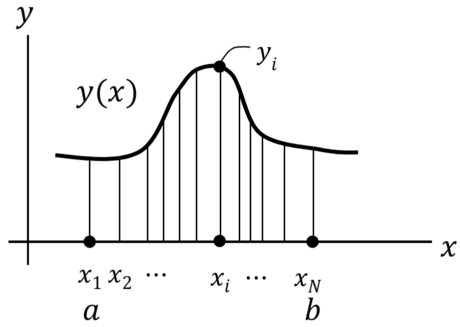

図１　１次元領域の離散化

(A)節点 $i\ (i = 1 \cdots N)$ における x 座標を x_i とする。

(B)要素とは節点で囲まれた小さな区分された領域で，１次元の場合は両端の節点の間の線分である。

(C)区分的試行関数 $\phi_i(x)$ とは図２のように，節点 i では $\phi_i(x_i) = 1$ ，他の節点では $\phi_i(x_j) = 0\ \ (i \ne j)$ となる１次関数とする。

(D) $\phi_i(x)$ は節点 i を含む２つの要素内，つまり，節点 i と節点 $i-1$ の間の領域（要素）と，節点 i と節点 $i+1$ の間の領域（要素）のみで値を持っている。
つまり，区分的試行関数 $\phi_i(x)$ とは節点 i に付随する関数である。

図２のように要素内で $\phi_i(x)$ が１次式で表わされる場合はその要素のことを（１次元）１次要素，２次式で表わされる場合は（１次元）２次要素という。

以下では，１次要素を対象にする。

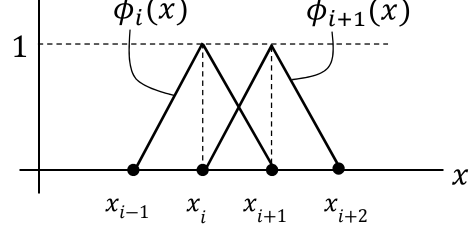

図２　区分的試行関数（１次元）

節点 i に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ は，

$$\begin{cases} \phi_i(x) = \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & (\, x_{i-1} \le x \le x_i \,) \\ \phi_i(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (\, x_i \le x \le x_{i+1} \,) \end{cases} \tag{2}$$

節点 $i+1$ に付随する区分的試行関数 $\phi_{i+1}(x)$ は,

$$\begin{cases} \phi_{i+1}(x) = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & (\, x_i \le x \le x_{i+1} \,) \\ \phi_{i+1}(x) = \dfrac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} & (\, x_{i+1} \le x \le x_{i+2} \,) \end{cases} \tag{3}$$

である。
領域 $x_i \le x \le x_{i+1}$ では，つまり節点 i と節点 $i+1$ の間の要素内では，$\phi_i(x)$ と $\phi_{i+1}(x)$ 以外の区分的試行関数はゼロであるから，この要素内で $y(x)$ は,

$$y(x) = y_i\phi_i(x) + y_{i+1}\phi_{i+1}(x) = y_i\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + y_{i+1}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{4}$$

と補間される。
上式は点（x_i , y_i）と（x_{i+1} , y_{i+1}）を結ぶ直線になる。なお，領域の両端点 $x = a\,,b$ を $x = x_1, x_N$ としているので上式では $1 \le i \le N-1$ である。そこで,

(E) 節点 i での近似関数値を y_i とすると，式(1)の$y(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i\phi_i(x)$ は
点（x_i , y_i)($i = 1 \cdots N$) を結んだ折れ線グラフになる。(１次要素の場合)

（２） １次元の場合の計算例

以上のような性質(A)-(E)を持った区分的試行関数 $\phi_i(x)$ を用いてリッツの方法に基づく有限要素法により前節と同じ変分問題を解く。この変分問題は微分方程式 $y'' = -1$ を書き換えたものである。
(変分問題)

$$I\,[y] = \int_0^1 ({y'}^2 - 2y)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

境界条件：$x = 0\,,1$ で　$y = 0$

とする。

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i\phi_i(x) \quad , \qquad y_i = y(x_i) \tag{1}$$

上式で y_i は変分パラメータである。
図１のように領域 $0 \le x \le 1$ を N 個の節点，N−１個の要素で分割する。

$${y'}^2 - 2y = \sum_{i,j=1}^{N} y_i y_j {\phi_i}'(x){\phi_j}'(x) - 2\sum_{i=1}^{N} y_i\phi_i(x)$$

であるから，停留条件を課すと，

$$\frac{\partial I}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{N}2y_j\int_0^1 {\phi_i}'(x){\phi_j}'(x)\,\mathrm{d}x-2\int_0^1\phi_i(x)\,\mathrm{d}x=0\qquad(i=1\cdots N)\qquad(6)$$

となり，$\{y_i\}$ を未知数とする $N\times N$ の連立１次方程式 $[\mathrm{A}]\{y_i\}=\{b_i\}$ が得られる。

$$\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & a_{ij} & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ y_i\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vdots\\ b_i\\ \vdots\end{bmatrix}\qquad(7)$$

$$a_{ij}=\int_0^1 {\phi_i}'(x){\phi_j}'(x)\,\mathrm{d}x\ ,\qquad b_i=\int_0^1\phi_i(x)\,\mathrm{d}x\qquad(8)$$

境界条件として $y_1=0\,,y_N=0$ を式(7)に代入する。それには

$$a_{ij}=\delta_{ij}\ ,\qquad b_i=0\quad(i=1\ or\ N)\qquad(9)$$

とする。

ここで，具体的に式(8)を計算してみる。
図３のように領域 $0\le x\le 1$ を５個の節点，
４個の要素で等分割すると（要素長 $h=1/4$ になる），
各要素内には２つの区分的試行関数しか存在しない
から，式(2)

$$\begin{cases}\phi_i(x)=\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & (\,x_{i-1}\le x\le x_i\,)\\[2mm] \phi_i(x)=\dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & (\,x_i\le x\le x_{i+1}\,)\end{cases}\qquad(2)$$

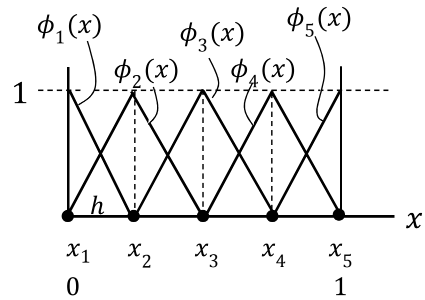

図３　領域分割と区分的試行関数

を用いて，

$$\sum_{i,j}a_{ij}=\int_0^1{\phi_i}'(x){\phi_j}'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^h(A)\,\mathrm{d}x+\int_h^{2h}(B)\,\mathrm{d}x+\int_{2h}^{3h}(C)\,\mathrm{d}x+\int_{3h}^{1}(D)\,\mathrm{d}x$$

において，被積分関数 $(A),(B),(C),(D)$ は，

$$(A)\Rightarrow {\phi_1}'(x){\phi_1}'(x)+\ {\phi_1}'(x){\phi_2}'(x)+\ {\phi_2}'(x){\phi_1}'(x)+\ {\phi_2}'(x){\phi_2}'(x)=\frac{1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{h^2}$$

$$(B)\Rightarrow {\phi_2}'(x){\phi_2}'(x)+\ {\phi_2}'(x){\phi_3}'(x)+\ {\phi_3}'(x){\phi_2}'(x)+{\phi_3}'(x){\phi_3}'(x)=\frac{1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{h^2}$$

$$(C)\Rightarrow {\phi_3}'(x){\phi_3}'(x)+{\phi_3}'(x){\phi_4}'(x)+\ {\phi_4}'(x){\phi_3}'(x)+\ {\phi_4}'(x){\phi_4}'(x)=\frac{1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{h^2}$$

$$(D)\Rightarrow {\phi_4}'(x){\phi_4}'(x)+\ {\phi_4}'(x){\phi_5}'(x)+\ {\phi_5}'(x){\phi_4}'(x)+\ {\phi_5}'(x){\phi_5}'(x)=\frac{1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{h^2}$$

であり，以上から行列成分 a_{ij} を計算する。例えば a_{22} は $\int_0^h(A)$ と $\int_h^{2h}(B)$ からの和になっていて，$a_{22}=2/h$ である。すべての行列成分を求めると，

$$[\,a_{ij}] = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

一方，b_i は式(2)より以下となるが，これらの積分は図 3 を見れば３角形の面積であるから単純に計算できて，

$$b_1 = \int_0^h \phi_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{h-x}{h}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}h$$

$$b_2 = \int_0^h \phi_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_h^{2h} \phi_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{x}{h}\mathrm{d}x + \int_h^{2h} \frac{2h-x}{h}\mathrm{d}x = h$$

$$b_3 = \int_h^{2h} \phi_3(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2h}^{3h} \phi_3(x)\,\mathrm{d}x = \int_h^{2h} \frac{x-h}{h}\mathrm{d}x + \int_{2h}^{3h} \frac{3h-x}{h}\mathrm{d}x = h$$

$$b_4 = \int_{2h}^{3h} \phi_4(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3h}^{1} \phi_4(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2h}^{3h} \frac{x-2h}{h}\mathrm{d}x + \int_{3h}^{1} \frac{1-x}{h}\mathrm{d}x = h$$

$$b_5 = \int_{3h}^{1} \frac{x-3h}{h}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}h$$

となる。

$$\therefore \qquad {}^t[b_i] = [b_1 \quad b_1 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5] = h[1/2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1/2]$$

したがって，

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

となるが，この連立１次方程式は解が存在しない。解が存在しないのは，行列の３列目＝－（１列目+２列目+４列目+５列目）となっていて 5 つの列ベクトルが線形独立でないことからわかる（行ベクトルでも同じ）。境界条件 $y_1 = 0\,, y_5 = 0$ を設定することにより正則な行列になる。$a_{11} = 1\,, a_{1j} = 0\ (j \neq 1),\ a_{55} = 1\,, a_{5j} = 0\ (j \neq 5)$ ，$b_1 = 0\,, b_5 = 0$ であるから結局，$y_2\,, y_3\,, y_4$ を未知数とする次の連立１次方程式となる。

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これを解くと，$h = 1/4$ より，$y_3 = 2h^2 = 1/8$ ，$y_2 = y_4 = 3h^2/2 = 3/32$ となる。

正解は $y(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)$ なので，$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ ，$y\left(\frac{1}{4}\right) = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{32}$ であり一致している。

実は，領域 $0 \leq x \leq 1$ を２要素３節点で分割した場合でも $y_2 = y(1/2) = 1/8$ は厳密解と一致する。

（補足）上の例で節点において厳密解と一致する理由

汎関数

$$I\,[y]=\int_{x_1}^{x_n}({y'}^2+2ay)\,\mathrm{d}x$$

（ a は定数）に対してオイラー方程式から $y''=a\ \rightarrow\ y=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$ が得られて，境界条件より定数 b，c が決まる。これを１次要素を用いた有限要素法で解くと，領域は等分割（分割幅 h ）とし，両端でディリクレ型境界条件 $\overline{y_1}$，$\overline{y_n}$ を満たすとして，

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & & \cdots & & 0\\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1\\ 0 & & \cdots & & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_i\\ \\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{y_1}/h^2\\ -a\\ -a\\ \vdots\\ -a\\ \overline{y_n}/h^2\end{bmatrix}$$

となるのは本文で示した通りである。上の連立１次方程式の第 i 行は符号を変えて，

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=a$$

となっているが，この関係式は $i=2\cdots n-1$ 行目まで同じである。
そして，これは２階微分の差分方程式であり，$y''=a$（一定）である。

２次関数 $y(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx+c$ をテーラー展開すると，

$$y(x+h)=y(x)+y'(x)\,h+\frac{1}{2}y''(x)\,h^2=\frac{1}{2}a(x+h)^2+b(x+h)+c$$

となり，２次関数ゆえ y''' 以降は０で上式は h の大きさに依らず成立する厳密な式である。したがって，

$$y(x_{i-1})=y(x_i-h)=y(x_i)-y'(x_i)\,h+\frac{1}{2}y''(x_i)\,h^2$$

$$y(x_{i+1})=y(x_i+h)=y(x_i)+y'(x_i)\,h+\frac{1}{2}y''(x_i)\,h^2$$

辺々加えると $y''(x)=a$（一定）ゆえ， $y(x_i)=y_i$ と表記して，

$$y_{i-1}+y_{i+1}=2y_i+y''(x_i)\,h^2\qquad\therefore\quad\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}=y''(x_i)=a$$

となる。これは厳密な関係式であり，$i=2\cdots n-1$ までとって両端のディリクレ型境界条件を加えると，この差分方程式は有限要素法による上の連立１次方程式と一致する。つまり１次要素を用いた有限要素解（節点における関数値 y_i ）が厳密解と一致する。
この理由は， $y(x)$ が２次関数であったからである。

（３） １次元要素の形状関数

以上の計算では積分を要素ごとに分割して計算したが，式(8)の積分はこのように要素内積分の総和として計算するのが効率的である。
領域 $x_i \le x \le x_{i+1}$ の要素では， $\phi_i(x)$ と $\phi_{i+1}(x)$ の２つ以外の区分的試行関数は存在しないから，要素に付随する区分的試行関数２つを考える。

$$N_{iel,k}(x) \quad (iel = 1 \cdots NE, \qquad k = 1\,,2\,) \qquad (10)$$

ここで，iel は要素番号，NE は総要素数で，上の例の場合 $NE = N - 1$ である。$k = 1\,,2$ は要素両端の節点を示す指標である。
領域 $x_i \le x \le x_{i+1}$ の要素番号を $iel = i$ とすれば，

$$\begin{cases} N_{iel\,,1}(x) = \phi_i(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & (\,x_i \le x \le x_{i+1}\,) \\ N_{iel\,,2}(x) = \phi_{i+1}(x) = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & (\,x_i \le x \le x_{i+1}\,) \end{cases} \qquad (11)$$

$$(\,1 \le iel \le NE\ ,\ 1 \le i \le N - 1\,)$$

である（図２参照)。

式(8)の積分を要素内積分 $\int_{iel}$ の和で表わせば，

$$\begin{cases} a_{ij} = \displaystyle\int_0^1 \phi_i{}'(x)\phi_j{}'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \sum_{iel=1}^{NE} \int_{iel} \sum_{k,s=1}^{2} N'_{iel\,,k}(x) N'_{iel\,,s}(x)\,\mathrm{d}x \\ b_i = \displaystyle\int_0^1 \phi_i(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \sum_{iel=1}^{NE} \int_{iel} \sum_{k=1}^{2} N_{iel\,,k}(x)\,\mathrm{d}x \end{cases} \qquad (12)$$

となる。
ここで，$\phi_i(x)$ の全体節点番号 $i = 1 \cdots N$ と $N_{iel\,,k}(x)$ の要素内節点番号 $k = 1{,}2$ とは対応が取れているとする。$i = knc(\,k, iel\,)$ という関数を用いる（第７節参照)。
式(10) (11)は形状関数と呼ばれ，要素に付随する区分的試行関数と言える。
節点に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ とは次の関係があり，

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i(x) = \sum_{iel=1}^{NE} \sum_{k=1}^{2} N_{iel,k}(x) \qquad (13)$$

領域全体で加えると同じものになるが，節点ごとに $\phi_i(x)$ を求めるよりも要素ごとに

$N_{iel,k}(x)$ を求める方が機械的に行えて（特に２次元の場合)，積分も $\int_{iel}$ の和で行える。

有限要素法ではこのような形状関数を使って要素内積分を行う。

形状関数という名前の由来は，$N_{iel,k}(x)$ が式(11)のように要素を構成する節点により表わさ

れるので，おそらく特に２次元要素（３角形や４角形）の場合に要素形状を反映する関数になるからである。

(F)形状関数 $N_{iel,k}(x)$ とは要素に付随する関数で，要素内で $y(x)$ を補間する関数である。
節点に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ ($i = 1 \cdots N$) を要素内に振り分けて要素に付随する関数としたものである。
要素内節点番号を k, s とすると $N_{iel,k}(x_s) = \delta_{k\,s}$ である。

（２）の具体的な計算例でも，要素ごとに積分を行っていたのであるが，
この形状関数 $N_{iel,k}(x)$ を使って表わすと，式(2)(3)より，
$iel = 1$ $(x_1 \le x \le x_2)$ では，

$$N_{1,1}(x) = \phi_1(x) \quad (x_1 \le x \le x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$N_{1,2}(x) = \phi_2(x) \quad (x_1 \le x \le x_2) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

同様に，

$$iel = 2 \ (x_2 \le x \le x_3)\ , \qquad N_{2,1}(x) = \phi_2(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}\ , \qquad N_{2,2}(x) = \phi_3(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$iel = 3 \ (x_3 \le x \le x_4)\ , \qquad N_{3,1}(x) = \phi_3(x) = \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3}\ , \qquad N_{3,2}(x) = \phi_4(x) = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

$$iel = 4 \ (x_4 \le x \le x_5)\ , \qquad N_{4,1}(x) = \phi_4(x) = \frac{x_5 - x}{x_5 - x_4}\ , \qquad N_{4,2}(x) = \phi_5(x) = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4}$$

となる。
式(12)の要素内節点番号 $k\,, s$ と全体節点番号 $i\,, j$ は対応が取れている。
式(12)の積分は要素ごとに $N_{iel\,,k}(x)$ についての積分（要素内積分）を行って総和をとることで，要素内節点番号 k に関する $N_{iel\,,k}(x)$ の積分を，k に対応する全体節点番号 i に付随する $\phi_i(x)$ の積分として行列成分 a_{ij} に加えて行く。
なお，要素内節点番号 k と全体節点番号 i の対応を取るための関数（変数）については第7節の２次元問題の場合で具体的に示す。

以上で示したように，有限要素法による(偏)微分方程式の解法は，変分問題に置き換えて最終的には $\{y_i\}$ を未知数とする連立１次方程式に帰着させる方法であるが，その原理はリッツの方法と同じで，違いは領域全体で値を持つ試行関数の代わりに，節点 i に付随する区分的試行関数 $\phi_i(x)$ を用いることである。さらに，この $\phi_i(x)$ を要素内に振り分けて要素 iel に付随する区分的試行関数として，形状関数 $N_{iel\,,k}(x)$ を用いることである。形状関数を用いることで領域全体の積分を要素内積分の和として機械的に計算することができる。
以下，２次元問題の場合でさらに具体的に示す。