$$\frac{\partial}{\partial a_i}\iint_S \{R(a_j, x, y)\}^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (i = 1 \cdots n) \qquad (7)$$

とする。

$$\therefore \quad \iint_S R\frac{\partial R}{\partial a_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad (i = 1 \cdots n) \qquad (8)$$

上式は，重み関数として

$$w_i(x, y) = \frac{\partial}{\partial a_i}R(a_j, x, y) \qquad (i = 1 \cdots n) \qquad (9)$$

を乗じることに等しい。

つまり，この重みには残差の 2 乗を最小にするという意味がある。

（4）ガラーキン法

重み関数として試行関数を用いる。

$$w_i(x, y) = \phi_i(x, y) \quad (i = 1 \cdots n) \qquad (10)$$

2 次元のラプラス方程式を例にとると，

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{n} u_j\, \phi_j(x, y) \qquad (11)$$

として，

$$\iint_S \phi_i\, \nabla^2 u \;\mathrm{d}S = 0 \;\;,\;\; \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (12)$$

となる。

次に，式(12)を書き換える。

$$\nabla\cdot(\phi_i\, \nabla u) = \nabla\phi_i\cdot\nabla u + \phi_i\, \nabla^2 u \qquad (13)$$

より，式(12)は

$$-\iint_S \nabla\phi_i\cdot\nabla u \;\mathrm{d}S + \iint_S \nabla\cdot(\phi_i\,\nabla u)\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (14)$$

となる。さらに，

次式の 2 次元のグリーンの定理（付録３）により上式の左辺第 2 項を境界積分に変換する。

$$\iint_S \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S} \boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad (15)$$

より，

$$\iint_S \nabla\cdot(\phi_i\,\nabla u)\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S}(\phi_i\,\nabla u)\times\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\partial S}\phi_i\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s \qquad (16)$$

となる。

ここで，$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \nabla u \cdot \boldsymbol{n}$ は法線方向微分である。

（注）$\nabla u \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s$

2 次元では境界上の
単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}\,(n_x\,, n_y)$,
単位接線ベクトルを $\boldsymbol{s}\,(s_x\,, s_y)$ とする
と（図 2），

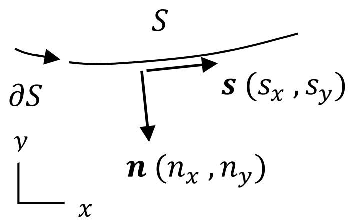

図２　境界上の接線・法線ベクトル

$(s_x\,, s_y) = (-n_y\,, n_x)$ であり，$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ より $(s_x\,, s_y) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)$ である。

したがって，

$$\nabla u \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \times (\mathrm{d}x\,, \mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \times \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \times (s_x\,, s_y)\,\mathrm{d}s$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \times (-n_y\,, n_x)\,\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (n_x\,, n_y)\,\mathrm{d}s = \nabla u \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s$$

一般に，2 次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ については $\boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ が成り立つ（付録３参照）。

したがって，式(14)，すなわち式(12)は

$$\iint_S \nabla \phi_i \cdot \nabla u \;\mathrm{d}S - \int_{\partial S} \phi_i \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = 0 \qquad (17)$$

と書き換えられる。

ラプラス（ポアソン）方程式では，境界 ∂S 上でディリクレ型境界条件，またはノイマン型境界条件が与えられていて，ノイマン型境界条件の場合は $\frac{\partial u}{\partial n}$ の値が既定されている。

式(11)を式(17)に代入すると，

$$\iint_S \nabla \phi_i \cdot \sum_{j=1}^{n} u_j \nabla \phi_j \;\mathrm{d}S - \int_{\partial S} \phi_i \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = 0 \quad (\,i = 1 \cdots n\,)$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{n} u_j \iint_S \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \;\mathrm{d}S - \int_{\partial S} \phi_i \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = 0 \quad (\,i = 1 \cdots n\,) \qquad (18)$$

したがって，次の $n \times n$ 連立 1 次方程式 $[A]\{u_i\} = \{b_i\}$ が得られる。

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_{ij} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{cases} a_{ij} = \displaystyle\iint_S \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ b_i = \displaystyle\int_{\partial S} \phi_i \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s \end{cases} \qquad (19)$$

上式は第 5 節の式(19)とは領域積分の項は同じだが，境界積分の項が加わっている。
リッツの方法（変分法）では，オイラー方程式の成立条件として第 2 節の式(15)が必要で，それは $u(x\,,y)$ がディリクレ型境界条件，または自然境界条件をもつ場合であった。

自然境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ であれば上の式(17)−(19)の境界積分項は消えて上の式(19)は第 5 節の式(19)と一致する。つまり，リッツの方法では自然境界条件が自然に取り込まれている。第 8 節のプログラム作成のところでディリクレ型境界条件を設定しない境界上の節点では自然境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ が暗黙のうちに与えられていたわけである。逆に，リッツの方法ではそのままでは $\frac{\partial u}{\partial n}\neq 0$ となるノイマン型境界条件を取り込むことができない（補足参照）。

ノイマン型境界条件を設定することは，静電場では特殊な場合であるが，熱伝導の解析では熱伝達境界条件としてよく現れる（付録 7 参照）。
なお，ディリクレ型境界条件の場合は第 5 節の式(20)と同様の手続きをとれば良い。

ガラーキン法で重み関数として試行関数を用いることは，リッツの方法と領域積分は一致して，さらに様々な境界条件を取り込めるという利点がある（特に２階線形微分方程式の場合)。境界条件の取り扱いはガラーキン法が容易だが，定式化はリッツの方法の方が簡単な場合もある（付録２参照）のでどちらの方法も重要である。

（補足）リッツの方法でノイマン型境界条件を取り込む方法

２次元のグリーンの定理（式(15)）は恒等式である。したがって，方程式(12)と方程式(17)は同値である。式(12)は残差の領域積分が 0 になるという条件しかないが，式(17)には境界積分に関する情報が加わっていて，そこに境界条件を取り込むことができる。

リッツの方法によるラプラス（ポアソン）方程式の有限要素法の定式化では任意の境界条件を取り込むことができない。つまり，オイラー方程式の成立条件をみたす境界条件しか与えられない。しかし，境界条件を満足させるような境界積分項を汎関数に加えることでリッツの方法による定式化も可能になる。

例えば，２次元ラプラス方程式で，境界 $\partial S=\partial S_1+\partial S_2$ として，∂S_1 にはディリクレ型境界条件，∂S_2 にはノイマン型境界条件が与えられている場合，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \begin{cases} u=\bar{u} & at\ \ \partial S_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=q=\bar{q}\ \ (\neq 0) & at\ \ \partial S_2 \end{cases}$$

次式の汎関数を考えると，$\frac{\partial u}{\partial n}=q=\bar{q}\neq 0$ のノイマン型境界条件を取り込むことができる。

$$I\,[u]=\iint_S \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\partial S_2}\bar{q}\,u\,\mathrm{d}s \qquad \text{(A)}$$

第２節で，汎関数が

$$I\,[u] = \iint_S \; f(x, y, u, u_x, u_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

のとき，

$u_0(x, y)$ を極値をとる関数として，

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon\,\eta(x, y)$$

を代入すれば，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon} = \iint_S \; \eta\left\{\frac{\partial f}{\partial u} - \nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u_x},\ \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right\}\mathrm{d}S + \int_{\partial S} \eta\left(\frac{\partial f}{\partial u_x},\ \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \qquad (19)(sec.2)$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon} = \iint_S \; \eta\left\{\frac{\partial f}{\partial u} - \nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u_x},\ \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right\}\mathrm{d}S + \int_{\partial S} \eta\left(\frac{\partial f}{\partial u_x},\ \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = 0$$

が得られた（第２節　式(19)）ので，上式(A)の場合は，

$$I\,[u] = \iint_S \; f(x, y, u, u_x, u_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\partial S_2} \bar{q}\,u\,\mathrm{d}s \quad , \quad f(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}$$

として，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\varepsilon} = \iint_S \; \eta\left\{\frac{\partial f}{\partial u} - \nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u_x},\ \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\right\}\mathrm{d}S + \int_{\partial S} \eta\left(\frac{\partial f}{\partial u_x},\ \frac{\partial f}{\partial u_y}\right)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s - \int_{\partial S_2} \bar{q}\,\eta\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\therefore\quad \iint_S \; \eta\left\{-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}\mathrm{d}S + \int_{\partial S} \eta\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s - \int_{\partial S_2} \bar{q}\,\eta\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\therefore\quad \iint_S \; \eta\left\{-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}\mathrm{d}S + \int_{\partial S} \eta\,\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s - \int_{\partial S_2} \bar{q}\,\eta\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\therefore\quad \iint_S \; \eta\left\{-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}\mathrm{d}S + \int_{\partial S_1} \eta\,\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s + \int_{\partial S_2} \eta\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q}\right)\mathrm{d}s = 0$$

となる。

したがって，境界 ∂S_1 上では $\eta = 0$（ディリクレ型境界条件）を満たし，かつ，境界 ∂S_2 上では $\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} = 0$（ノイマン型境界条件）を満たす２次元ラプラス方程式が領域 S で成り立つ。式(A)の右辺第２項は式(18)の境界積分項が出て来るように加えたとも言える。

やはり，式(A)の境界積分項を探すよりもガラーキン法で定式化した方が容易である。