$$\begin{cases} \omega = \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \end{cases}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}) = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{g})\, \mathrm{dV} = 0$$

$$\therefore \quad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{g}) = 0 \qquad (26)$$

2 次元平面では,

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0 \qquad (27)$$

以上，$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ より，3 次元，2 次元で $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$ （ 2 次元ではスカラー 0 ）と $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{g}) = 0$ が得られた。

（２）一般化された部分積分の公式

1 変数の部分積分の公式は,

$$\begin{cases} (fg)' = f'g + fg' \\ \displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b \end{cases}$$

である。
一般化すると，式(21)で $\omega = \omega_1\omega_2$ として定理 2)を使って,

$$\begin{cases} \mathrm{d}(\omega_1\omega_2) = (\mathrm{d}\omega_1)\omega_2 + (-1)^p\, \omega_1(\mathrm{d}\omega_2) & (23) \\ \displaystyle\int_D (\mathrm{d}\omega_1)\omega_2 + (-1)^p \int_D \omega_1(\mathrm{d}\omega_2) = \int_{\partial D} \omega_1\omega_2 & (28) \end{cases}$$

が得られる。ここで，Dは領域，∂D は Dを囲む境界である。
式(28)は一般化された部分積分の公式である。
なお，上式(28)で $\omega_2 = 1$ とすると,

$$\int_D \mathrm{d}\omega_1 = \int_{\partial D} \omega_1$$

となり，これは一般化されたストークスの定理である。
以下に，3 次元，2 次元の場合の部分積分公式の具体例を示す。

（３）3 次元空間での部分積分の公式

$$(3-1) \qquad \iiint_V (\mathrm{grad}\, f) \cdot \boldsymbol{g}\, \mathrm{dV} + \iiint_V f(\mathrm{div}\, \boldsymbol{g})\, \mathrm{dV} = \iint_{\partial V} f(\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}) \qquad (29)$$

（証明）
右辺の被積分関数について，

$\omega_1 = f$ ：0 次微分式

$\omega_2 = \boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = g_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + g_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + g_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ ：2 次微分式

として，公式(28)を適用する。ω_1は 0 次微分式ゆえ，

$$\int_D (\mathrm{d}\omega_1)\omega_2 + \int_D \omega_1(\mathrm{d}\omega_2) = \int_{\partial D}\omega_1\omega_2$$

となる。

$$\mathrm{d}\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega_1)\omega_2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)(g_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + g_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + g_3\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2)\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}g_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}g_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}g_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = (\mathrm{grad}\, f)\cdot\boldsymbol{g}\ \mathrm{dV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_2 &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial g_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\ &\quad + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\\ &\quad + \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial g_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= (\mathrm{div}\,\boldsymbol{g})\ \mathrm{dV}\end{aligned}$$

$$\omega_1(\mathrm{d}\omega_2) = f(\mathrm{div}\,\boldsymbol{g})\ \mathrm{dV}$$

したがって，公式(3−1)が得られる。$\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ は外積の計算である。
なお，この公式は，$f = 1$ とするとガウスの定理である。

$$(3-2) \qquad \iiint_V (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}\ \mathrm{dV} - \iiint_V \boldsymbol{f}\cdot(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g})\ \mathrm{dV} = \iint_{\partial V} (\,\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}\,)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \qquad (30)$$

（証明）
右辺の被積分関数について，

$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g} = (\,f_2g_3 - f_3g_2\,, f_3g_1 - f_1g_3\,, f_1g_2 - f_2g_1\,)$ ：0 次微分式のベクトル

$\quad = (\,h_1\,, h_2\,, h_3\,) = \boldsymbol{h}$

$\boldsymbol{\omega}_2 = \mathrm{d}\mathbf{S} = (\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\,, \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1\,, \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\,)$ ：2 次微分式のベクトル

として，公式(28)を適用する。$\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2$ はベクトルである。$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h}$ より，