【15】一般化されたストークスの定理

3 次元のストークスの定理

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \qquad (9)$$

は，1 次微分式を $\omega = \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ (1)

その外微分の 2 次微分式が $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (4)

となって，

$$\iint_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega \qquad (19)$$

と表わされる。

ガウスの定理

$$\iiint_V (\mathrm{div}\,\boldsymbol{h})\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \boldsymbol{h}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (15)$$

も，2 次微分式を $\omega = \boldsymbol{h}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (3)

その外微分の 3 次微分式が $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{h}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{h})\,\mathrm{dV}$ (12)

となって，

$$\iint_V \mathrm{d}\omega = \int_{\partial V} \omega \qquad (20)$$

と表わされる。

『　ω を微分式，$\mathrm{d}\omega$ をその外微分，Dを領域，∂D を D を囲む境界として，

$$\iint_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega \qquad (21)$$

　を一般化されたストークスの定理　』　という。

これまでに出てきた微分式 ω とその外微分 $\mathrm{d}\omega$ の関係をまとめると，
スカラー関数 f，ベクトル関数 $\boldsymbol{g}$ ，$\boldsymbol{h}$（これらは 0 次微分式である）を，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}) = f(\,x_1\,, x_2\,, x_3\,) \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (\,g_1(\boldsymbol{x})\,, g_2(\boldsymbol{x})\,, g_3(\boldsymbol{x})\,) \\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (\,h_1(\boldsymbol{x})\,, h_2(\boldsymbol{x})\,, h_3(\boldsymbol{x})\,) \end{cases}$$

として，

3 次元空間では,

1 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = f \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = (\mathrm{grad}\, f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{cases}$

2 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \end{cases}$ ⇒ 3 次元のストークスの定理

3 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = \boldsymbol{h}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{h}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}) = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{h})\,\mathrm{dV} \end{cases}$ ⇒ ガウスの定理

2 次元平面の場合は,

1 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = f \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = (\mathrm{grad}\, f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{cases}$

2 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = \boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g})\mathrm{dS} \end{cases}$ ⇒ 2 次元のストークスの定理

2 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = \boldsymbol{h}\times \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\boldsymbol{h}\times \mathrm{d}\boldsymbol{x}) = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{h})\,\mathrm{dS} \end{cases}$ ⇒ 2 次元のグリーンの定理

1 次元では,

1 次微分式 dω $\begin{cases} \omega = f \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x \end{cases}$

となり，以上の ω と $\mathrm{d}\omega$ の関係について式(21)が成り立つ。

すなわち，2 次元，3 次元のストークスの定理，ガウスの定理，2 次元のグリーンの定理が統一的に表現される。

なお，2 次元，3 次元の $\begin{cases} \omega = f \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = (\mathrm{grad}\, f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \end{cases}$ からは線積分

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_C (\mathrm{grad}\, f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} (\mathrm{grad}\, f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = [f(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} = [\omega]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$$

が得られる。
スカラー関数 $f(\boldsymbol{x})$ の $\mathrm{grad}\, f$ の線積分が始点と終点の値だけによるという定理であった。

また，3 次元のグリーンの定理（式(17)）でも

$$\begin{cases} \omega = (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\{(u\nabla v - v\nabla u)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\} = (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,\mathrm{dV} \end{cases}$$

となっていて,
一般化されたストークスの定理が成り立っていることがわかる。$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(u\nabla v - v\nabla u)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ の右辺第 1 項を計算してみると,

$$\mathrm{d}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x}\ ,u\,\frac{\partial v}{\partial y}\ ,u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \left(\mathrm{d}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ ,\mathrm{d}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\ ,\mathrm{d}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right)\cdot(\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,)$$