【９】体積要素とその変数変換

２重積分，３重積分の変数変換を外積代数によって行う。３次元空間の面積ベクトルの変数変換については【11】面積分のところでやる。

第８節で面積，体積が外積で表わされることがわかった。第７節(2)ヤコビアン(2 次元)の解釈(仮)では面積要素 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ をベクトル積 $\mathrm{d}x_1 \times \mathrm{d}x_2$ と考えたが，正しくは外積で考える。多重積分の $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ や $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ は外積の意味である。

（１）体積要素とヤコビアン

面積は 2 つのベクトルの外積で表わされるので，
2 重積分 $\int \quad \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ の面積要素 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ を外積 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ と考える。つまり，

$$\int \quad \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \Rightarrow \int \quad \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \Rightarrow \int \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2$$

と解釈する。
変数変換は,

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1\,, x_2) \\ y_2 = y_2(x_1\,, x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}y_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}y_2 = \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \end{cases}$$

次のベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2$，$\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{y}_2$ に対して，（図４参照）

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 = (\,\mathrm{d}x_1\,, \quad 0\,) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 = (\,0 \quad , \mathrm{d}x_2\,) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{y}_1 = (\,\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\,, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\,) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{y}_2 = (\,\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\,, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\,) \end{cases}$$

外積を用いて面積要素 $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ と $\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$ は,

$$\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 = (\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\,)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{y}_1 \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{y}_2 = (\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\,)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$= (\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\,)\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

と表わされる。

したがって，面積要素の拡大率は，次の行列式で表わされる。

$$\frac{\partial(\,y_1\,,\,y_2\,)}{\partial(\,x_1\,,\,x_2\,)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| = (i\,,j)\,element \qquad (8)$$

これをヤコビアン（関数行列式）という。したがって，変数変換は

$$\int \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \int \frac{\partial(\,y_1\,,\,y_2\,)}{\partial(\,x_1\,,\,x_2\,)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

と表わされる。

以上の計算を，（ $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ ）を省いて外積∧の演算規則

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \\ \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0 \end{cases}$$

のみを用いて，代数計算で機械的に体積要素の変数変換をしていくことができる。

$$\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right) \wedge \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)$$

$$= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \qquad (29)$$

外積の記号∧を省いて，

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i \\ \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i = 0 \end{cases}$$

と表記することもある。

3 重積分 $\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ の体積要素 $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ についても

$$\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \Rightarrow \int \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \Rightarrow \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}_1 \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{x}_2 \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{x}_3$$

と解釈する。

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = y_1(x_1\,,x_2\,,x_3) \\ y_2 = y_2(x_1\,,x_2\,,x_3) \\ y_3 = y_3(x_1\,,x_2\,,x_3) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}y_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}y_2 = \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}y_3 = \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \end{array}\right.$$

の変数変換については,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \mathrm{d}y_3 &= \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial y_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial y_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \\ &\quad \wedge \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial y_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \\ &= \cdots\cdots = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) = \frac{\partial(\,y_1\,,\ y_2,\ y_3\,)}{\partial(\,x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \qquad (30) \end{aligned}$$

となる。

ヤコビアン

$$\frac{\partial(\,y_1\,,\ y_2,\ y_3\,)}{\partial(\,x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \qquad (31)$$

は体積要素の拡大率である。

（２）極座標・円柱座標への変数変換

（ｉ）2 次元極座標（$\rho\,,\varphi$）

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x = \dfrac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \dfrac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= (\cos\varphi\,\mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi) \\ &= (\rho\cos^2\varphi)\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\varphi - (\rho\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\rho = \rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\varphi \qquad (32) \end{aligned}$$