【８】外積・行列式・面積・ベクトル積・体積

（１）外積と行列式

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の外積（交代積）$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ を次のように定義する。$\wedge$ はウェッジと読む。

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \qquad (10)$$

交換すると負になるということなので，同じベクトルの外積は，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = 0$ である。
ベクトル空間をV，外積空間をV∧Vとして，

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{V} \quad , \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \in \mathrm{V} \wedge \mathrm{V}$$

である。3 つ以上の外積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \cdots$ については，隣同士の交換で負号が付くとする。
どれか 2 つを入れ替えるということは隣同士の交換を奇数回行うことであるから，どれか 2 つを入れ替えると符号が変わるということでもある。

また，次の分配則，結合則が成り立つとする。

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} & (11) \\ \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} & (12) \end{cases}$$

（注） $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \wedge \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ は間違い。
$(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}$ と同種のベクトルではなく，$(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$ と $\boldsymbol{a}$ の交換は定義されてない。
隣同士の交換で負になるということなので，正しくは，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ である。あるいは，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \wedge \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ である。

（注）本テキストでの外積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$ は数学的にはテンソル代数の一部を取り出したものである。テンソル代数の簡単な説明を付録 7 に記した。

（ｉ）2 次元での $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$

2 次元平面のベクトルでは，

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \, , \ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det[\, \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \,] \qquad (13)$$

である。
つまり，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ は行列式 $\det[\, \boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \,]$ である。これは行列式の定義でもある。
行列式は列を交換すると負号がつく。すなわち，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$ である。

（ⅱ）2 次元平面での $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ の幾何学的意味

2 次元平面のベクトル $\boldsymbol{a} = (\,a_1\,, a_2\,)$，$\boldsymbol{b} = (\,b_1\,, b_2\,)$

の作る平行 4 辺形の面積は,

図 5 で長方形の面積 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ から 4 つの 3 角形と

2 つの長方形の面積を引いて,

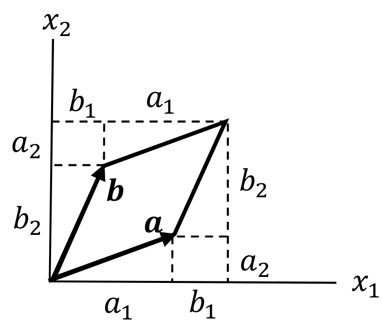

図 5　外積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ の幾何学的意味

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - \frac{1}{2}a_1 a_2 \times 2 - \frac{1}{2}b_1 b_2 \times 2 - a_2 b_1 \times 2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

となる。したがって，$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ は $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の作る平行 4 辺形の面積である。

一方，平行 4 辺形の面積はベクトル $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ への角を θ として，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$ でもあるから，

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det[\,\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\,] = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta \qquad (14)$$

となる。

$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 2 次元平面での基底ベクトル $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)\det[\,\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\,] \qquad (15) \end{aligned}$$

となる。

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (16)$$

であるから，これは単位面積といえる。すると,

$$\det[\,\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\,] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

は単位面積に対する拡大率になる。

なお，ベクトル空間 V の基底が $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ のとき，外積空間 $\mathrm{V} \wedge \mathrm{V}$ の基底が $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ となっている。

これは斜交座標系でも成り立つ。

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_1{}'\mathbf{e}_1{}' + a_2{}'\mathbf{e}_2{}' \\ \boldsymbol{b} = b_1{}'\mathbf{e}_1{}' + b_2{}'\mathbf{e}_2{}' \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (a_1{}'\mathbf{e}_1{}' + a_2{}'\mathbf{e}_2{}') \wedge (b_1{}'\mathbf{e}_1{}' + b_2{}'\mathbf{e}_2{}') = (\mathbf{e}_1{}' \wedge \mathbf{e}_2{}')(a_1{}'b_2{}' - a_2{}'b_1{}')$$

ここで，$(\mathbf{e}_1{}' \wedge \mathbf{e}_2{}')$ が単位面積である。

（iii）3 次元空間での $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$

3 次元空間で,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = (\, a_1\,, a_2\,, a_3\,) \\ \boldsymbol{b} = (\, b_1\,, b_2\,, b_3\,) \\ \boldsymbol{c} = (\, c_1\,,\, c_2\,,\, c_3\,) \end{cases}$$

の 3 つのベクトルに対して,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \wedge (c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3)$$

となるが，ここで，$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$ ゆえ,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} &= a_1\mathbf{e}_1 \wedge (b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \wedge (c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_2\mathbf{e}_2 \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_3\mathbf{e}_3) \wedge (c_1\mathbf{e}_1 + c_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + a_3\mathbf{e}_3 \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \wedge (c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \quad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &= -\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\,\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\,\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)\left\{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} \\ &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)\left\{a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} \qquad (17) \end{aligned}$$

となる。上式の{　}の中は行列式

$$\det [\, \boldsymbol{a} \;\; \boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{c}\,] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

の余因子展開である。

$$\therefore \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \det [\, \boldsymbol{a} \;\; \boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{c}\,] \qquad (18)$$

これが，ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の作る平行 6 面体の体積であることは以下でわかる（後述)。

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \det [\, \mathbf{e}_1 \;\; \mathbf{e}_2 \;\; \mathbf{e}_3\,] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (19)$$

は単位体積である。

また，$\mathbf{e}_1\,, \mathbf{e}_2\,, \mathbf{e}_3 \in \mathrm{V}$ ，$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \in \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \wedge \mathrm{V}$ である。

（２）ベクトル積

（ｉ）3 次元空間での $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ とその幾何学的意味

3 次元空間での 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (\ a_1\ , a_2\ , a_3\ )$，$\boldsymbol{b} = (\ b_1\ , b_2\ , b_3\ )$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\
&= (\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\ )(a_2b_3 - a_3b_2) + (\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\ )(a_3b_1 - a_1b_3) + (\ \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\ )(a_1b_2 - a_2b_1)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\ ) \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + (\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\ ) \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + (\ \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\ ) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (20)
$$

となる。ベクトル空間 V が 2 次元のときは，外積空間 V∧V の基底は $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ のみで 1 次元であったが，V が 3 次元のときは，V∧V の基底は $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ ，$\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ ，$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ の 3 つになり 3 次元になった。 $\mathbf{e}_1\ , \mathbf{e}_2\ , \mathbf{e}_3 \in \mathrm{V}$ ， $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\ , \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\ , \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \in \mathrm{V} \wedge \mathrm{V}$ である。これら 3 つの基底は行列式ではなく，スカラーなのかベクトルなのかまだわからない。（付録 7 参照）

3 つの基底の成分については，

$a_2b_3 - a_3b_2$ はベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{V}$ を $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ 座標面に射影してできる平行 4 辺形の面積
$a_3b_1 - a_1b_3$ はベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{V}$ を $\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$ 座標面に射影してできる平行 4 辺形の面積
$a_1b_2 - a_2b_1$ はベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{V}$ を $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ 座標面に射影してできる平行 4 辺形の面積

である。

3 次元空間でも $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$ は平行 4 辺形の面積（ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ で平面を作るので 2 次元に帰着する）で，この平行 4 辺形を 3 つの座標面に射影した面積が

$$
\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
$$

になっている。

ここで，グラミアン $\mathrm{G}(\ \boldsymbol{a}\ , \boldsymbol{b}\ )$ という次の量を考えると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G}(\ \boldsymbol{a}\ , \boldsymbol{b}\ ) &\equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix} \\
&= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \sin^2\theta \qquad (21)
\end{aligned}
$$

（θは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ への角度）

これは，ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ で作る平行 4 辺形の面積の 2 乗で，２次元でも３次元でも成り立つ。

そこで，３次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (\ a_1\ , a_2\ , a_3\ )$，$\boldsymbol{b} = (\ b_1\ , b_2\ , b_3\ )$ について $\mathrm{G}(\ \boldsymbol{a}\ , \boldsymbol{b}\ )$ を成分で計算してみると，

$$\mathrm{G}(\,\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,)=(\,{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\,)\left(\,{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\,\right)-(\,a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,)^2$$

$$\begin{aligned}
= \;& {a_1}^2\,{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_1}^2{b_3}^2\\
&+{a_2}^2\,{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_3}^2\\
&+{a_3}^2\,{b_1}^2+{a_3}^2{b_2}^2+{a_3}^2{b_3}^2\\
&-(\,{a_1}^2\,{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+{a_3}^2{b_3}^2\,)\\
&-2(\,a_1b_1a_2b_2+a_1b_1a_3b_3\;+a_2b_2a_3b_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=a_1b_2(a_1b_2-a_2b_1)+a_1b_3(a_1b_3-a_3b_1)+a_2b_1(a_2b_1-a_1b_2)\\
&\quad+a_2b_3(a_2b_3-a_3b_2)+a_3b_1(a_3b_1-a_1b_3)+a_3b_2(a_3b_2-a_2b_3)
\end{aligned}$$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2$$

となる。

$$\therefore\quad \mathrm{G}(\,\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}\,)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2 \qquad (22)$$

つまり，3 次元空間での $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ の 3 つの基底 $\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ の成分,

$$\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

は平行 4 辺形の面積 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ の 3 つの座標面 $\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$ への射影であり，これらの成分の２乗の和が平行 4 辺形の面積の２乗になっている。これは面積についてのピタゴラスの定理で，ベクトルの長さの２乗が $|\boldsymbol{a}|^2={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2$ となるのと同様である。

（ⅱ）ベクトル積の定義

以上のことから，外積空間 V∧V の 3 つの基底 $\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ を 3 次元のベクトル空間 V の中に取り込んで，（３次元の場合に偶然うまくいく！）

$\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\to\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\to\mathbf{e}_2$ ， $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\to\mathbf{e}_3$ に対応させるべく，次のようにベクトル積を定義する。

$$\begin{cases}\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3\end{cases}\qquad (23)$$

つまり，$\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ を $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$ として３次元ベクトル空間 V の中のベクトルとして扱う。すると,