（HP の追加ページ）2024.7 月

ベクトル解析が 2 次元平面，3 次元空間での定積分に相当するというのは，ベクトル解析の様々な公式が領域積分と境界積分の関係になっているからです。1 変数（1 次元）の場合は，直線上の領域での定積分が両端の境界点での値で表わされますが，これと同様なことが 2 次元平面，3 次元空間で成立しているということです。

【ベクトル解析の活用について】

ベクトル解析の活用は，電磁気学と流体力学の分野で基本的な公式を使うくらいではないかと思われているかも知れませんが（たぶん多くはそうだろうと思います），例えば，境界要素法では領域で成立する偏微分方程式を境界積分方程式に変換するので，その際にあまり知られていないベクトル解析の公式を使うことがあります。
また，一般に領域積分を境界積分に変換することは次元を 1 つ下げることになるので計算が簡単になるはずです。そこで，ベクトル解析の公式が積分計算の簡単化に有効に活用される場合があるのではないかと思われます。

例えば，2 次元平面でスカラー関数 $f(x,y)$ を領域積分する場合，

$$\iint_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S f(x,y)\,\mathrm{dS}$$

ですが，この面積領域での積分をその領域を囲む境界上（閉曲線）の積分に変換できます。

$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}\,\mathrm{dS} = \int_{\partial S} \boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$　　（2 次元のストークスの定理）

$\iint_S \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}\,\mathrm{dS} = \int_{\partial S} \boldsymbol{h}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}$　　（2 次元のグリーンの定理）

を使ってみると，（なお，2 次元では $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}$ や $\boldsymbol{h}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ はスカラーです）

$\iint_S f(x,y)\,\mathrm{dS}$ を境界積分 $\int_{\partial S}$ に変換するには，

$f(x,y) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}$ あるいは $f(x,y) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}$ となるベクトル関数 $\boldsymbol{g}\big(g_x(x,y),\ g_y(x,y)\big)$ や $\boldsymbol{h}\big(h_x(x,y),\ h_y(x,y)\big)$ を求めることが必要になります。

特別な場合として，あるスカラー関数 $\phi(x,y)$ により $f(x,y) = \nabla^2\phi$ と表わされていれば，$\boldsymbol{h} = \nabla\phi$ として 2 次元のグリーンの定理を使えば，

$$\iint_S \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}\,\mathrm{dS} = \iint_S \nabla^2\phi\,\mathrm{dS} = \iint_S f(x,y)\,\mathrm{dS} = \int_{\partial S} \nabla\phi\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

と変換できます。

また，別の特殊な変換として，

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\phi(x\,,y)=f(\,x\,,y\,)\;\;,\qquad \boldsymbol{g}=(\,0\,,\phi\,)\;\;,\qquad \boldsymbol{h}=(\,\phi\,,0\,)$$

とすれば,

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}=\frac{\partial\phi}{\partial x}=f(\,x\,,y\,)\quad\therefore\iint_S f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{dS}=\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{g}\,\mathrm{dS}=\int_{\partial S}\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial S}\phi(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

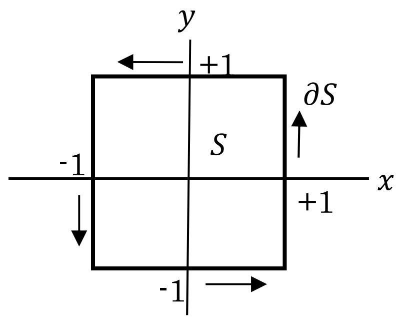
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{h}=\frac{\partial\phi}{\partial x}=f(\,x\,,y\,)\quad\therefore\iint_S f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{dS}=\iint_S \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}\,\mathrm{dS}=\int_{\partial S}\boldsymbol{h}\times\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial S}\phi(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

となり, $\frac{\partial}{\partial x}\,\phi(x\,,y)=f(\,x\,,y\,)$ となる $\phi(x\,,y)$ を求めれば, 境界積分 $\int_{\partial S}$ に変換できます。

一方，$\frac{\partial}{\partial y}\,\psi(x\,,y)=f(\,x\,,y\,)$ となる $\psi(x\,,y)$ を求めれば, $\boldsymbol{g}=(\,\psi\,,0\,)$, $\boldsymbol{h}=(\,0\,,\psi\,)$ として,

$$\iint_S f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{dS}=-\int_{\partial S}\psi(x\,,y)\,\mathrm{d}x$$

と変換できます。



具体的な計算例として,
矩形領域 $-1\leqq\,x\,,y\,\leqq+1$ の場合には,

$$\iint_S f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{dS}=\int_{\partial S}\phi(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

$$f(\,x\,,y\,)=\frac{\partial}{\partial x}\,\phi(x\,,y)$$

より，領域積分は,

$$\iint_S f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{dS}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ですが,
境界積分は,

$$\int_{\partial S}\phi(x\,,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{+1}\phi(+1\,,y)\,\mathrm{d}y+\int_{+1}^{-1}\phi(-1\,,y)\,\mathrm{d}y$$

であり，y 軸に平行な２つの直線上（$x=\pm1$）での変数 y のみの積分となります。
普通は，デカルト座標系で 2 重積分というと矩形領域での積分のことなので，上の $\phi(x\,,y)$ を見つければ２次元のストークスの定理を使って２重積分を１変数の積分に簡単化できることになります。

また別の計算例として，原点中心，半径 a の内部の領域 S で，例えば

$$f(\,x\,,y\,)=r^2+2x^2+1\;\;,\;\phi(x\,,y)=x(r^2+1)\qquad(r^2=x^2+y^2)$$

$$\therefore\quad\frac{\partial}{\partial x}\,\phi(x\,,y)=f(\,x\,,y\,)\;\;,\quad\iint_S f(\,x\,,y\,)\,\mathrm{dS}=\int_{\partial S}\phi(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

とすると，２次元極座標（r ,θ）に変換して，

$$\mathrm{dS} = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \ , \qquad \mathrm{d}y = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \ , \ \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

より，

$$\iint_S f(x, y)\,\mathrm{dS} = \iint_S (r^2 + 2x^2 + 1)\,\mathrm{dS} = \int_0^a\int_0^{2\pi}(r^2 + 2r^2\cos^2\theta + 1)r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^a\int_0^{2\pi}(r^3 + 2r^3\cos^2\theta + r)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_0^a 2\pi(r^3 + r^3 + r)\,\mathrm{d}r = \pi(a^4 + a^2)$$

$$\int_{\partial S}\phi(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial S}x(r^2 + 1)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}a^2(a^2 + 1)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi(a^4 + a^2)$$

となり，
境界積分のほうが少しは簡単になります。

解析的に計算できるのは矩形領域と円形領域の場合くらいで，任意形状の領域では離散化して数値積分する必要がありますが，領域積分より境界積分を実行するほうがメッシュ分割の労力，計算機負荷ともに圧倒的に少なくて済みます。

次に，3 次元空間でスカラー関数 $f(x, y, z)$ を領域積分する場合，

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{dV}$$

ですが，この体積領域での積分を，その領域を囲む境界上（閉曲面）の積分に変換するには，

$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}\,\mathrm{dV} = \iint_{\partial V}\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ （ガウスの定理） $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

を使って，$f(x, y, z) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}$ となるベクトル関数 $\boldsymbol{h}$ を見つける必要があります。
あるいは，

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x, y, z) = f(x, y, z) \ , \qquad \boldsymbol{h} = (0, 0, \phi)$$

となる $\phi(x, y, z)$ を見つけて，

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{h}\,\mathrm{dV} = \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{dV} = \iint_{\partial V}\boldsymbol{h}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\partial V}\phi(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

として変換できます。

$\iint_{\partial V}\phi(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ の計算は矩形(直方体)領域ならおそらく比較的簡単と思われますが，球面上でも極座標（r ,θ ,φ）で

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi - r\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = a^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi(r = a)$$

となるので，例えば，$\phi(x,y,z)$ が z 軸対称なら θ による積分計算のみになります。

以上，次元を１つ下げるために領域積分を境界積分に変換してきましたが，逆に，境界積分を領域積分に変換することもできます。次元を１つ上げることで計算が簡単になることも，あるいはあるかも（？）知れません。

ベクトル解析の利用について，電磁気学や流体力学での理論の記述だけでなく実際の積分計算に活用できる例を考えてみましたが，きっと他にもまだまだあると思われますので，ぜひベクトル解析の活用の幅を拡げて頂ければと思います。

そのためにも，本セミナーで「ベクトル解析の基礎」を知って頂ければと思います。