

# 目次

|   | 頁  |
|---|----|
| <b>I 多変数の微分</b>   |    |
| 【1】微分とは1次化すること  | 1  |
| (1) 1変数の場合  |    |
| (2) 多変数(2変数)の場合   |    |
| (3) 多変数の合成関数の場合   |    |
| 【2】極座標・円柱座標への変数変換   | 5  |
| (1) 2次元極座標 $(\rho, \varphi)$  |    |
| (2) 3次元円柱座標 $(\rho, \varphi, z)$  |    |
| (3) 3次元極座標 $(r, \theta, \varphi)$   |    |
| 【3】勾配 gradient  | 8  |
| (1) 勾配ベクトル  |    |
| (2) 勾配ベクトルと単位法線ベクトル $\mathbf{n}$  |    |
| (3) スカラー場とベクトル場   |    |
| 【4】曲線と曲面(および接線・接平面の方程式)   | 13 |
| (1) 曲線・曲面の媒介変数表示(パラメータ表示)   |    |
| (2) 曲線・曲面の陰関数表示   |    |
| <b>II 多変数の積分</b>  |    |
| 【5】積分の意味づけ  | 17 |
| (1) 1変数関数 $y = y(x)$ の定積分 $\int_a^b y(x) dx$  |    |
| (2) 2変数関数 $z = f(x, y)$ の2重積分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ ( $D$ は領域)                    |    |
| (3) 3変数関数 $\rho = \rho(x, y, z)$ の3重積分 $\iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$ ( $D$ は領域) |    |
| 【6】微分と積分の関係(1変数の場合)   | 19 |
| 【7】体積要素とヤコビアン(多変数の積分)   | 22 |
| (1) 体積要素  |    |
| (2) ヤコビアン(2次元)の解釈(仮)  |    |
| 【8】外積・行列式・面積・ベクトル積・体積   | 24 |
| (1) 外積と行列式  |    |
| (2) ベクトル積   |    |
| (3) 面積・体積のまとめと補足  |    |
| 【9】体積要素とその変数変換  | 34 |
| (1) 体積要素  |    |
| (2) 極座標・円柱座標への変数変換  |    |

|   |    |
|---|----|
| 【10】線積分   | 38 |
| (1) 曲線上の線要素 $ds$ と $\mathbf{ds}$                          |    |
| (2) 曲線上のスカラー関数 $f(\mathbf{x})$ の積分                        |    |
| (3) 線積分 $\int_C \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}$ |    |
| 【11】面積分   | 44 |
| (1) 曲面上の面積要素 $dS$ と面積ベクトル $d\mathbf{S}$                   |    |
| (2) 曲面上のスカラー関数 $f(\mathbf{x})$ の積分                        |    |
| 【12】体積積分  | 48 |

### III ベクトル解析

|   |    |
|---|----|
| 【13】回転・ストークスの定理   | 49 |
| (1) 1次微分式の微分と回転 $\text{rot}$ の定義  |    |
| (2) 面積分 $\iint_S \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$ の定義  |    |
| (3) 2次元のストークスの定理  |    |
| (4) 3次元のストークスの定理  |    |
| (5) 回転 $\text{rot } \mathbf{g}$ の意味   |    |
| 【14】発散・ガウスの定理   | 54 |
| (1) 2次微分式の微分と発散 $\text{div}$ の定義  |    |
| (2) ガウスの定理  |    |
| (3) 2次元のグリーンの定理   |    |
| (4) 3次元のグリーンの定理   |    |
| (5) 発散 $\text{div } \mathbf{h}$ の意味   |    |
| 【15】一般化されたストークスの定理  | 59 |
| 【16】一般化された部分積分の公式   | 62 |
| (1) 微分式の微分に関する定理  |    |
| (2) 一般化された部分積分の公式   |    |
| (3) 3次元空間での部分積分の公式  |    |
| (4) 2次元平面での部分積分の公式  |    |
| (5) 補足  |    |
| 【17】境界が時間変化する場合の積分公式  | 72 |
| (1) 3つの基本形  |    |
| (2) 3つの基本形とストークスの定理などを組み合わせた公式  |    |
| (3) 開曲線 $C(t)$ , 開曲面 $S(t)$ における $\frac{d}{dt} \int_{C(t)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{x}$ , $\frac{d}{dt} \iint_{S(t)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{S}$ |    |
| (4) 線積分・面積分・体積積分の時間微分   |    |

## 付録

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 【付録1】 3次元のストークスの定理の証明（本文続き） | 83  |
| 【付録2】 $\nabla$ を含む主なベクトル公式  | 86  |
| 【付録3】 ベクトル・グリーンの定理の証明       | 89  |
| 【付録4】 ガウスの定理・ストークスの定理の代替形式  | 93  |
| 【付録5】 電磁気学への応用              | 95  |
| 【付録6】 流体力学への応用              | 104 |
| 【付録7】 テンソル代数について            | 113 |